

Aula 4 – A equação de Bernoulli

Objetivos

O aluno deverá ser capaz de:

- Descrever a dinâmica de escoamento de um fluido.
- Deduzir a Equação de Bernoulli.
- Aplicar a Equação de Bernoulli e a Equação da Continuidade a aparelhos de medida como o Medidor de Venturi e o Tubo de Pitot.

Introdução

Na Aula 3, deduzimos uma propriedade cinemática fundamental do escoamento de um fluido, dada pela Equação da Continuidade. Esta equação é uma consequência natural do princípio de conservação da matéria e expressa apenas o fato de que a massa total de um fluido deve permanecer constante durante o escoamento. Este princípio simples, contudo, nos fornece uma informação importante acerca da cinemática do escoamento, dizendo como deve variar a velocidade do fluido ao variar-se a seção reta de escoamento. Na aula de hoje, estaremos interessados em descrever as propriedades dinâmicas do escoamento de um fluido. Estas propriedades podem ser obtidas a partir das leis fundamentais da mecânica newtoniana. A questão básica que procuraremos responder na aula de hoje é: como podemos calcular a pressão em todos os pontos de um fluido em escoamento? Assim como um princípio de conservação nos forneceu a Equação da Continuidade, a equação dinâmica para o escoamento de um fluido também será obtida a partir de uma lei de conservação: a Lei de Conservação da Energia. A equação dinâmica que obteremos é chamada Equação de Bernoulli, em homenagem a Daniel Bernoulli, matemático francês do século XVIII.

A Equação de Bernoulli

Para deduzirmos a Equação de Bernoulli, vamos estudar o trecho de escoamento de um fluido mostrado na Figura 4.1. Este trecho envolve a variação de altura de z_1 para z_2 , e da seção reta de escoamento de A_1 para A_2 . Note que, ao contrário do que foi feito nas aulas de Hidrostática (Aulas

1 e 2), vamos escolher o eixo de referência vertical z orientado para cima. A escolha da origem do eixo z é livre e não interfere no cálculo da pressão no fluido. Concentremos nossa atenção na porção de fluido compreendida entre os pontos A e B da Figura 4.1.a. Trataremos esta porção de fluido como nosso *sistema*. A Figura 4.1.a mostra a posição do sistema no instante t , enquanto que a Figura 4.1.b mostra um instante posterior t' . Entre t e t' o sistema se move e em t' ele está compreendido entre os pontos C e D.

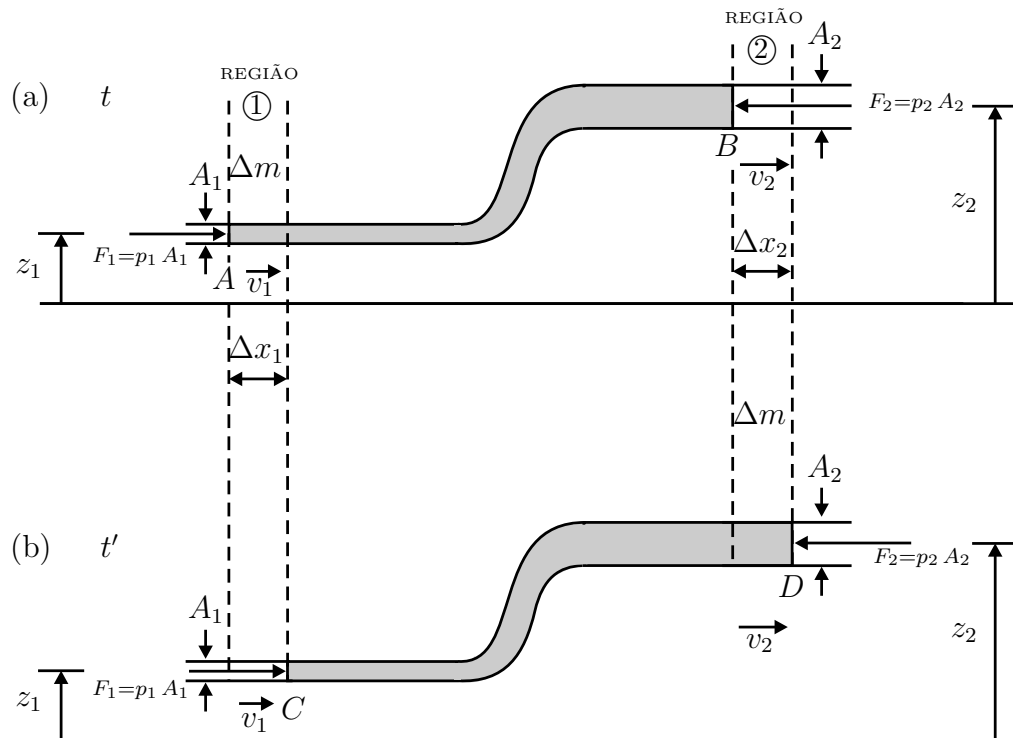


Figura 4.1: Representação de um trecho do escoamento de um fluido incompressível em dois instantes de tempo.

Vamos agora identificar as forças que atuam no sistema. Seja p_1 a pressão na parte inferior do fluido, de maneira que uma força horizontal com módulo $F_1 = p_1 A_1$ atue nesta parte do fluido. Esta força é exercida pelo restante do fluido, à esquerda do nosso sistema. Trata-se, portanto, de uma força que aponta para a direita conforme indicado na Figura 4.1. Por outro lado, há também uma força horizontal com módulo $F_2 = p_2 A_2$ que atua na parte superior do fluido. Esta força aponta para a esquerda, pois é exercida pela porção do fluido à direita do nosso sistema.

Para calcularmos o trabalho resultante realizado sobre o sistema entre t e t' , temos ainda que discutir o movimento das partes inferior e superior do sistema. Nesse intervalo de tempo, a extremidade inferior do sistema desloca-se de uma distância Δx_1 indo de A para C, e a força F_1 realiza o trabalho $W_1 = F_1 \Delta x_1$. Ao mesmo tempo, a extremidade superior desloca-se de Δx_2 indo de B para D, e a força F_2 realiza o trabalho $W_2 = -F_2 \Delta x_2$. Note que, W_2 é negativo, pois o sistema desloca-se para a direita, enquanto F_2 aponta para a esquerda. Assim, o trabalho total realizado sobre o sistema é

$$W = W_1 + W_2 = p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 . \quad (4.1)$$

O trabalho total realizado pelas forças F_1 e F_2 é igual à variação de energia mecânica do sistema. Por outro lado, a energia mecânica do nosso sistema é a soma das energias cinética e potencial gravitacional. Assim, precisamos calcular a variação de energia do sistema entre t e t' . Repare que se o escoamento do fluido for ideal e o fluido incompressível, todos os pontos do nosso sistema compreendidos entre os pontos C e B terão densidades e velocidades constantes durante o intervalo de tempo entre t e t' . Portanto, a energia mecânica (cinética + potencial gravitacional) deste pedaço do sistema E_{CB} permanecerá constante durante este intervalo de tempo. Assim, podemos concentrar nosso estudo nas mudanças ocorridas em duas regiões do sistema, uma entre os pontos A e C (região 1) e outra entre B e D (região 2). Seja $\Delta m = \rho A_1 \Delta x_1$ a massa contida na região 1 no instante t , onde ρ é a densidade do fluido e $A_1 \Delta x_1$ é o volume desta região. O volume total do sistema pode ser escrito como $V_T = V_{CB} + A_1 \Delta x_1$, sendo V_{CB} o volume da região intermediária, compreendida entre os pontos C e B. Em t' esta porção de fluido terá se deslocado completamente para a direita, e a parte superior do sistema terá ocupado a região 2. Neste momento, o volume total do sistema será $V'_T = V_{CB} + A_2 \Delta x_2$. Uma vez que o fluido é incompressível, sua densidade permanece constante bem como o volume total do sistema, isto é, $V_T = V'_T$. Portanto, cancelando V_{CB} , encontramos que

$$A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = V , \quad (4.2)$$

o que significa que as regiões 1 e 2 têm o mesmo volume, e

$$\rho A_2 \Delta x_2 = \rho A_1 \Delta x_1 = \Delta m , \quad (4.3)$$

o que significa que as regiões 1 e 2 possuem a mesma massa Δm . Estas conclusões são essenciais para calcularmos a variação de energia mecânica entre t e t' .

De fato, a energia mecânica total do sistema em t é igual à energia mecânica do trecho entre C e B mais a soma das energias cinética e potencial da região 1, isto é,

$$E(t) = E_{CB} + \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 + \Delta m g z_1 .$$

Da mesma forma, temos que

$$E(t') = E_{CB} + \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g z_2 .$$

Portanto, a variação de energia $\Delta E = E(t') - E(t)$ entre os instantes t e t' é

$$\Delta E = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g z_2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 - \Delta m g z_1 .$$

Usando $W = \Delta E$ e a Equação 4.1 encontramos que

$$p_1 A_1 \Delta x_1 - p_2 A_2 \Delta x_2 = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 + \Delta m g z_2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 - \Delta m g z_1 . \quad (4.4)$$

Finalmente, lembrando que $A_1 \Delta x_1 = A_2 \Delta x_2 = V$ (Equação 4.2) e $\Delta m = \rho V$ (Equação 4.3), podemos cancelar V na Equação 4.4 e rearrumar os termos para obter

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g z_2 . \quad (4.5)$$

Como os pontos 1 e 2 são dois pontos quaisquer do fluido, podemos escrever de maneira geral que

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = C , \quad (4.6)$$

onde C é uma constante. A Equação 4.6 é a Equação de Bernoulli, que governa o escoamento ideal de um fluido incompressível. Ela nos diz que durante o escoamento as variações de altura e velocidade do fluido devem ser acompanhadas de variações de pressão, de maneira a manter-se constante a quantidade do lado esquerdo da Equação 4.6. Por exemplo, de acordo com a Equação de Bernoulli **para pontos à mesma altura** ($z_1 = z_2$), onde a velocidade de escoamento do fluido for maior (tubulação mais estreita), a pressão será menor, e vice-versa. Da Equação 4.5 vemos ainda que, sabendo-se a pressão e a velocidade no ponto 1, a pressão no ponto 2 dependerá apenas

da velocidade v_2 e da diferença de altura entre os dois pontos. Assim sendo, a pressão p_2 é independente da posição da origem do eixo z . Ou seja, a escolha da origem é livre e não afeta o cálculo da pressão, conforme dissemos inicialmente.

Por outro lado, é interessante notar que a Equação de Bernoulli também pode ser aplicada a um fluido estático fazendo-se $v = 0$. Por exemplo, considere um fluido em repouso no interior de um recipiente. Seja p_0 a pressão na superfície do fluido e z_0 a altura da superfície com relação ao fundo do recipiente. Se quisermos calcular a pressão em um ponto qualquer P situado a uma altura z do fluido, podemos aplicar a Equação de Bernoulli (com $v = 0$):

$$p_0 + \rho g z_0 = p + \rho g z \implies p = p_0 + \rho g (z_0 - z). \quad (4.7)$$

Repare que, $z_0 - z$ é justamente a profundidade do ponto P, de maneira que a Equação 4.7 é equivalente à Equação 1.16 (veja a Aula 1). Contudo, ao compararmos as Equações 4.7 e 1.16 devemos ser cuidadosos, notando que na parte de Hidrostática (Aula 1) utilizamos um sistema de referência formado por um eixo vertical, orientado para baixo, e com a origem na superfície do fluido; enquanto, aqui, utilizamos um eixo vertical, orientado para cima, e com a origem no fundo do recipiente. Por isso, na Equação 4.7 temos $z_0 - z$, enquanto na Equação 1.16 temos apenas z , mas o conteúdo físico de ambas as equações é o mesmo.

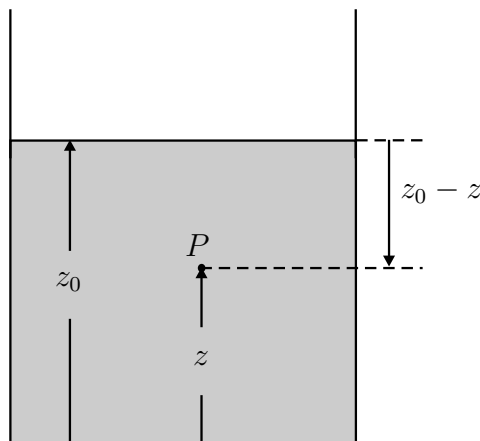


Figura 4.2: Aplicação da Equação de Bernoulli a um fluido em repouso

Exemplo 1

Uma seringa cheia de água, com $A = 2,0 \text{ cm}^2$ de seção transversal

é conectada a uma mangueirinha cuja seção é $a = 1,0 \text{ cm}^2$. A seringa é disposta na horizontal e a outra extremidade da mangueirinha é elevada a uma altura $h = 3,0 \text{ m}$ acima da seringa. Uma força F é, então, aplicada ao êmbolo da seringa de maneira a ejetar um jato de água pela extremidade alta da mangueira (veja a Figura 4.3). Supondo que o jato de água seja ejetado horizontalmente, qual deve ser o valor de F para que a água tenha um alcance $R = 1,5 \text{ m}$?

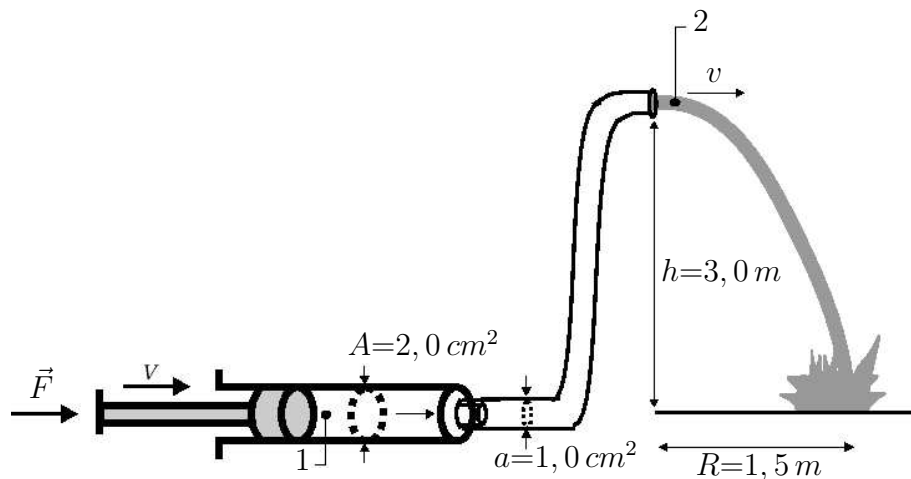


Figura 4.3: Exemplo 1. Uma seringa conectada a uma mangueirinha elevada de $3,0 \text{ m}$, ejeta água a uma distância de $1,5 \text{ m}$.

Solução:

A força F pode ser facilmente calculada se conhecermos a pressão p próximo ao êmbolo. Uma vez que o êmbolo está em contato com a atmosfera, a pressão sobre ele será dada pela pressão atmosférica p_0 mais o acréscimo de pressão devido à força F , ou seja,

$$p = p_0 + F/A \implies F = (p - p_0) A .$$

Portanto, a força F depende da pressão manométrica da água próxima ao êmbolo. Assim sendo, temos primeiro que calcular a pressão manométrica $p - p_0$. Para tal, aplicamos a Equação de Bernoulli aos pontos 1 (próximo ao êmbolo) e 2 (logo após a saída da mangueirinha) conforme é mostrado na Figura 4.3. Uma vez que o ponto 2 está do lado de fora da mangueirinha, a pressão neste ponto é justamente a pressão atmosférica, isto é, $p_2 = p_0$. A escolha da origem do eixo z é livre, de maneira que faremos $z = 0$ próximo ao êmbolo. Assim sendo, a Equação de Bernoulli nos dá

$$p + \frac{1}{2}\rho V^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h ,$$

onde V é a velocidade do êmbolo e v é a velocidade de ejeção da água. Por outro lado, da Equação da Continuidade temos que

$$V = \frac{a}{A} v .$$

Portanto, a força F no êmbolo será

$$F = (p - p_0) A = \frac{1}{2} \rho v^2 \left(\frac{A^2 - a^2}{A} \right) + \rho g h A .$$

Resolvendo a queda livre (trajetória parabólica), com lançamento horizontal a uma altura h e velocidade v , encontramos que o alcance é:

$$R = v \sqrt{\frac{2h}{g}} \implies v^2 = \frac{g R^2}{2h} = \frac{9,8 \text{ m/s}^2 \times (1,5 \text{ m})^2}{2 \times 3,0 \text{ m}} = 3,7 \text{ m}^2/\text{s}^2 .$$

Finalmente, substituindo este valor de v^2 na expressão para F , e utilizando a densidade da água $\rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, encontramos:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times 3,7 \text{ m}^2/\text{s}^2}{2} \times \frac{(2,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2)^2 - (1,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2)^2}{2,0 \times 10^{-4} \text{ m}^2} \\ &\quad + \rho g h A + 1 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 4,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 3 \text{ m} \times (2 \times 10^{-4} \text{ m}^2)^2 \\ &= 0,28 \text{ N} \end{aligned}$$

O Medidor de Venturi

O Medidor de Venturi é um dispositivo utilizado para a medição da velocidade v de escoamento de um fluido. O esquema deste dispositivo está descrito na Figura 4.4. O tubo de escoamento, de seção transversal A , possui um estrangulamento com uma seção transversal menor a . Tomamos dois pontos do escoamento (pontos 1 e 2), um deles sobre o estrangulamento (ponto 2), e aplicamos primeiramente a equação da continuidade, o que nos fornece

$$v_2 = v \frac{A}{a} . \quad (4.8)$$

Além disso, os pontos 1 e 2 estão aproximadamente à mesma altura, de maneira que $z_1 = z_2$. Portanto, os termos oriundos da energia potencial se cancelam ao aplicarmos a Equação de Bernoulli aos pontos 1 e 2:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v^2 \frac{A^2}{a^2} .$$

Resolvendo para v obtemos

$$v = a \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho (A^2 - a^2)}} , \quad (4.9)$$

onde $\Delta p = p_1 - p_2$ é a diferença de pressão entre os pontos 1 e 2.

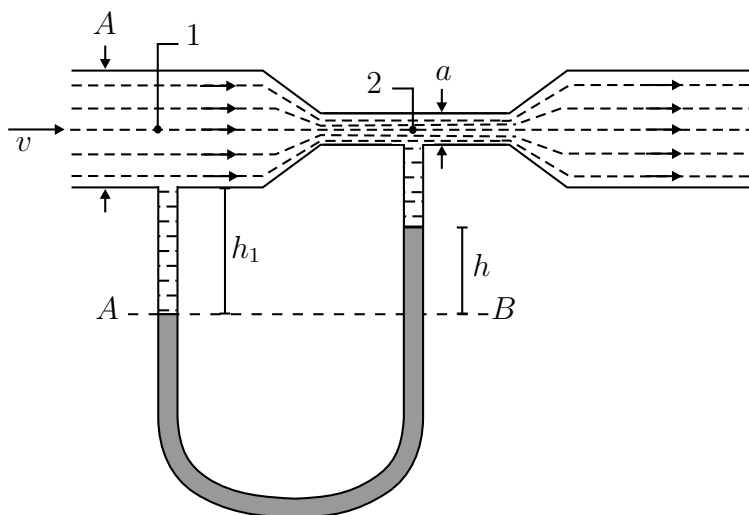


Figura 4.4: Esquema do Medidor de Venturi.

A Equação 4.9 nos permite obter a velocidade de escoamento do fluido a partir de uma medida de Δp . Assim sendo, um manômetro de tubo em U é, então, conectado aos pontos 1 e 2. A diferença de pressão Δp é dada pelo desnível h do fluido manométrico nos dois braços do manômetro. Ao conectarmos o manômetro, parte do fluido em escoamento entra nos dois braços do manômetro e preenche os espaços não ocupados pelo fluido manométrico. Os fluidos no interior do manômetro ficarão em equilíbrio, de maneira que poderemos aplicar os princípios da hidrostática ao manômetro. Para tal, tomemos os pontos A e B à mesma altura, um em cada braço do manômetro como mostra a Figura 4.4. Acima do ponto A temos uma coluna de altura h_1 do fluido em escoamento. A pressão no topo desta coluna é justamente a pressão p_1 . Por outro lado, acima do ponto B temos uma coluna de altura h do fluido manométrico, seguida de uma coluna de altura $h_1 - h$ do fluido em escoamento. A pressão no topo desta coluna é igual a p_2 . Calculando as pressões nos pontos A e B e igualando-as, obtemos:

$$\begin{aligned} p_1 + \rho g h_1 &= p_2 + \rho_m g h + \rho g (h_1 - h) , \\ \implies \Delta p &= (\rho_m - \rho) g h , \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde ρ_m é a densidade do fluido manométrico. Finalmente, podemos substi-

Obs.: A diferença de altura devido à variação do diâmetro do tubo de escoamento é pequena e pode ser desprezada.

tuir a Equação 4.10 na Equação 4.9 para obtermos

$$v = a \sqrt{\frac{2(\rho_m - \rho)gh}{\rho(A^2 - a^2)}}. \quad (4.11)$$

Assim, conhecendo-se as seções transversais A e a , e as densidades ρ e ρ_m , o Medidor de Venturi nos fornece o valor da velocidade de escoamento, a partir da leitura do desnível h no manômetro.

O Tubo de Pitot

O Tubo de Pitot é um dispositivo utilizado para medir a velocidade de escoamento de gases. O esquema deste dispositivo é mostrado na Figura 4.5. Ele é constituído de um tubo estreito, interno a outro tubo mais largo. O tubo externo é mais estreito em uma de suas extremidades (extremidade esquerda na Figura 4.5), juntando-se ao tubo interno. Na outra extremidade, o tubo interno atravessa a base do tubo externo e conecta-se a um dos braços de um manômetro de tubo em U. O outro braço do manômetro é conectado ao tubo externo, o qual possui ainda duas aberturas laterais a . Assim, um braço do manômetro (o direito) estará sob a pressão do tubo interno enquanto o outro braço estará sob a pressão existente na região entre os dois tubos.

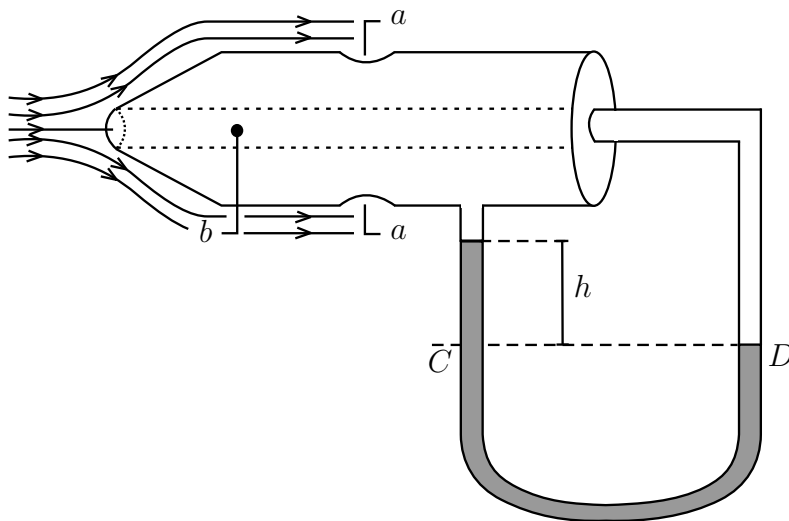


Figura 4.5: Esquema do Tubo de Pitot.

Quando um gás escoa pelo Tubo de Pitot, a pressão na região entre os tubos (região intermediária) será diferente da pressão no interior do tubo

interno. Isto ocorre porque não há escoamento do gás dentro do tubo interno, enquanto as aberturas a fazem o contato da região intermediária com o fluxo tangente ao tubo externo, conforme indicam as linhas de escoamento mostradas na Figura 4.5. Assim, podemos aplicar a Equação de Bernoulli às aberturas a e a um ponto b dentro do tubo interno. Para tal, iremos desprezar a variação de altura entre estes pontos uma vez que ambos os tubos interno e externo são na realidade estreitos. Uma vez que $v_b = 0$, pois não há escoamento dentro do tubo interno, obtemos

$$p_a + \frac{1}{2} \rho v_a^2 = p_b ,$$

$$\Rightarrow v_a = \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho}} , \quad (4.12)$$

onde $\Delta p = p_b - p_a$ é a diferença de pressão entre a região intermediária e o interior do tubo interno.

Como no caso do Medidor de Venturi, esta diferença de pressão será obtida através da leitura do desnível h no manômetro de tubo em U. Contudo, lembre-se de que estamos tratando do escoamento de um gás, cuja densidade é certamente muito menor do que a densidade ρ_m do fluido manométrico.

Assim sendo, iremos desprezar as colunas de gás em ambos os braços do manômetro, de maneira que a pressão no ponto C do manômetro (veja a Figura 4.5) será

$$p_C = p_a + \rho_m g h$$

e a pressão no ponto D será

$$p_D = p_b .$$

Como os pontos C e D do manômetro estão à mesma altura, temos que $p_C = p_D$ e $\Delta p = \rho_m g h$. Finalmente, substituindo Δp na Equação 4.12, obtemos

$$v_a = \sqrt{\frac{2 \rho_m g h}{\rho}} . \quad (4.13)$$

O Tubo de Pitot é usado, por exemplo, para medir a velocidade de escoamento do ar pelas asas de alguns aviões.

Resumo

Nesta aula, fizemos a descrição dinâmica do escoamento de um fluido, deduzindo a Equação de Bernoulli que fornece a relação entre a pressão, a altura e a velocidade de escoamento em todos os pontos de um fluido. Lembre-se de que esta equação só é aplicável em condições de escoamento ideal. Felizmente, em diversas aplicações práticas a Equação de Bernoulli pode ser utilizada. Assim sendo, vimos também na aula de hoje os princípios de funcionamento de aparelhos de medida como o Medidor de Venturi e o Tubo de Pitot.

Exercícios

1. Uma bomba mecânica é utilizada para encher uma caixa d'água localizada $6,0\text{ m}$ acima. A saída da bomba tem um diâmetro de $10,0\text{ cm}$, e é conectada a uma tubulação com $5,0\text{ cm}$ de diâmetro. Sabendo que a água é jogada na caixa d'água a uma velocidade de $1,0\text{ m/s}$:
 - (a) Encontre a velocidade da água na saída da bomba.
 - (b) Encontre a pressão da água na saída da bomba.
 - (c) Calcule a potência gasta pela bomba.
 - (d) Calcule o trabalho realizado pela bomba para encher uma caixa com $4,0\text{ m}^3$.
2. Em uma tubulação de água com $4,0\text{ cm}$ de diâmetro, o escoamento se dá com velocidade igual a $5,0\text{ m/s}$. A água é conduzida para um ponto $12,0\text{ m}$ mais alto, onde a tubulação é mais estreita, com $1,5\text{ cm}$ de diâmetro. Encontre a diferença de pressão na água entre o ponto mais alto e o ponto mais baixo do escoamento.
3. Um líquido escoar por uma tubulação horizontal com uma área transversal de 30 cm^2 . A tubulação eleva-se por $12,0\text{ m}$ e conecta-se a outra tubulação com área transversal de 90 cm^2 . Qual deve ser a vazão do líquido se a pressão é a mesma nas duas tubulações?
4. Um tanque contém água até uma altura $H = 3,0\text{ m}$. Um pequeno furo com área $a = 1,0\text{ cm}^2$ é feito na superfície lateral do tanque, a uma profundidade $h = 1,0\text{ m}$, deixando a água escapar. Esta situação está descrita na Figura 4.6. Suponha que a área A da superfície do tanque seja muito grande ($A \gg a$).

- (a) Encontre com que velocidade v a água escapa pelo furo e a que distância x da base do tanque ela cai.
- (b) Se quisermos que a água caia a uma distância $x = 4,0\text{ m}$, em que profundidade devemos furar o tanque? Quantas respostas podemos encontrar?
- (c) Encontre a profundidade na qual devemos furar o tanque para que o alcance seja máximo.
- (Sugestão: Aplique a Equação de Bernoulli e a Equação da Continuidade a um ponto situado sobre a superfície do fluido e outro imediatamente após o furo.)

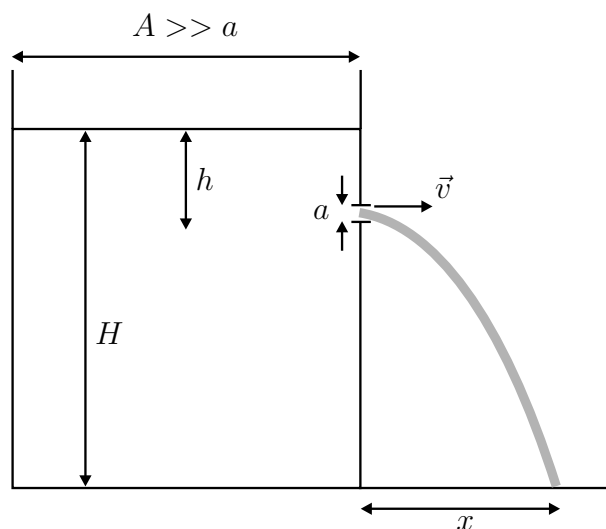


Figura 4.6: Exercício 4. Tanque cheio com água, furado lateralmente. A água escapa e é ejetada a uma distância x da base do tanque.

5. O sifão é um dispositivo bem conhecido, muito utilizado para retirar o líquido de um recipiente que não pode ser tombado. Este dispositivo está descrito na Figura 4.7. Para utilizarmos o sifão, devemos primeiro encher um tubo com o líquido, submergir uma das extremidades do tubo no recipiente (extremidade A), mantendo a outra extremidade (C) tampada, e posicionar a extremidade C a uma altura abaixo da extremidade A. Ao destamparmos a extremidade C, o líquido começa a fluir pelo tubo, esvaziando o recipiente.

Considere um líquido de densidade ρ . Seja h_A a profundidade da extremidade A imersa no líquido, h_B a altura do ponto mais alto do tubo (ponto B na Figura 4.7), contada a partir da superfície do líquido, e h_C a diferença de altura entre as extremidades A e C.

- (a) Qual é a velocidade do líquido ao sair pela extremidade C? O que ocorre se $h_C = 0$, ou seja, se as duas extremidades estiverem à mesma altura?
- (b) Qual é a pressão no líquido no ponto mais alto (ponto B)?
- (c) Qual é a altura máxima à qual podemos elevar o ponto B de maneira a não interromper o escoamento do líquido pelo sifão?

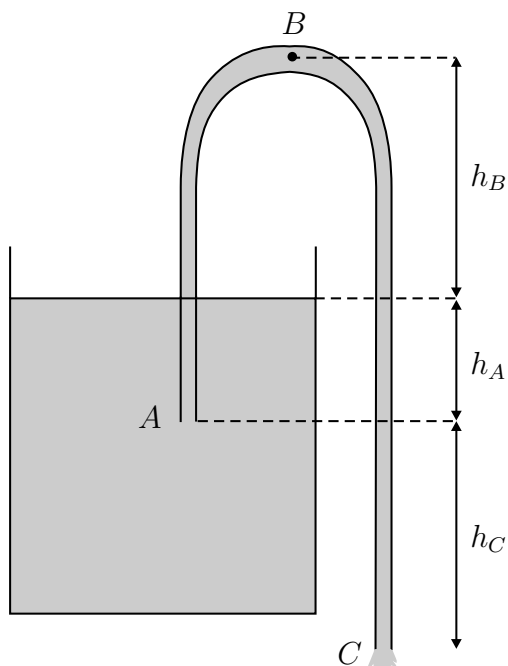


Figura 4.7: Exercício 5. Sifão utilizado para retirar o líquido de um recipiente.